(Fact) $H_o: \rho = 0$ 아래서의 표본상관계수와 표본편상관계수의 점근분산은 $1/n$ 이다.

(e.g.) Stationary AR(1) with MDS error term:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \text{with } |\rho| < 1 \text{ and } \{\varepsilon_t\} \mid \Omega_{t-1} \sim MDS[0, \sigma_\varepsilon^2]$$

(단, Ω_{t-1} 은 $t-1$기 이전의 y들에 의하여 (또는 마찬가지로 ε들에 의하여) 만들어진 정보집합.)

OLS: $\hat{\rho} = \dfrac{\sum y_{t-1} y_t}{\sum y_{t-1}^2}$

$$\hat{\rho} = \rho + \frac{\sum y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum y_{t-1}^2}$$

Note that this estimator is biased but consistent:

$$\hat{\rho} - \rho = \frac{\frac{1}{n}\sum y_{t-1}\varepsilon_t}{\frac{1}{n}\sum y_{t-1}^2} \xrightarrow{p} \frac{E(y_{t-1}\varepsilon_t)}{E(y_{t-1}^2)} = 0$$

$$\therefore \hat{\rho} \xrightarrow{p} \rho$$

Estimator of the variance of the error term:

$$\widehat{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{n}\sum (y_t - \hat{\rho} y_{t-1})^2 \xrightarrow{p} \sigma_\varepsilon^2$$

(Theorem) A CLT for ergodic stationary martingale difference(MDS)[25]

Let $\{X_t\}$ be a vector MDS sequence that is stationary and ergodic with $E(X_t X_t') = \Sigma < \infty$. Then

$$\sqrt{n}\,\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{d} N[0, \Sigma] \qquad \blacksquare$$

(Exercise) Show

(i) $\{y_{t-1}\varepsilon_t\}$ is a stationary MDS

(ii) $E(y_{t-1}\varepsilon_t) = 0$

(iii) $E(y_{t-1}^2\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 \, Plim \frac{1}{n}\sum y_{t-1}^2 = \sigma_\varepsilon^4/(1-\rho^2) < \infty$ $\blacksquare$

So, by the Theorem and Exercise,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum y_{t-1}\varepsilon_t \xrightarrow{d} N\left[0,\ \sigma_\varepsilon^2 \, Plim \frac{1}{n}\sum y_{t-1}^2\right]$$

25) Hayashi, Fumio (2000), Econometrics, Princeton Univ. Press, p.106.

which is essential for the following result.

Limiting distribution:

$$\sqrt{n}\,(\hat{\rho}-\rho) \;=\; (\frac{1}{n}\sum y_{t-1}^2)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum y_{t-1}\varepsilon_t$$

$$\xrightarrow{d}\; N\left[\,0\,,\; Plim\,\sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{n}\sum y_{t-1}^2\right)^{-1}\right] \;=\; N\,[\,0,\;1-\rho^2\,]$$

Asymptotic distribution:

$$\hat{\rho} \;\overset{A}{\sim}\; N\,[\,\rho,\;(1-\rho^2)/n\,]$$

Hence, under $H_o:\ \rho = 0$,

$$\hat{\rho} \;\overset{A}{\sim}\; N\,[\,0,\;1/n\,]$$

■

그러므로 5% 유의수준아래 표본자기상관계수 또는 표본편자기상관계수가 근사적으로 $\pm 2/\sqrt{n}$ 의 범위 내에 들어가는 값이면 비유의적. 즉 위의 귀무가설 $H_o:\ \rho = 0$를 기각할 수 없다.

1.3.4.2 정보기준(information criteria)

여러 모형 가운데 하나를 선택하는 수단으로서 정보기준을 이용하는 방식이 있음. 정보기준을 대상이 되는 모형 하나 하나에 대하여 계산한 후 가장 최소값을 제공하는 모형을 선택하는 것이 그 방법임. 정보기준은 여러 가지가 개발되어졌으나 현실에서 주로 쓰이는 것은 다음 두 가지임.

Akaike information criterion:

Choose the model with the minimum value of AIC.

$$AIC \;=\; n\log(RSS) + 2k$$

Bayesian information criterion(Schwartz information criterion):

Choose the one with the minimum value of BIC.

$$BIC \;=\; n\log(RSS) + k\log(n)$$

AIC는 consistent하지 못하고 과대모형을 선정하는 성향이 있음. 반면 BIC는 asymptotically consistent. 반면 AIC는 BIC보다 더 작은 mean square error를 지닌다는 simulation 결과가 학계에 보고된 바 있음. 그러므로 consistency를 우선시하는 경우에는 BIC를, 반면에 (consistency를 희생하더라도) MSE를 최소화하기를 원하는 경우에는 AIC를 더 중시.

1.3.5 The Box-Jenkins Method

현실에서 ARMA모형을 만드는 방법으로 Box와 Jenkins에 의하여 제안된 방법. 이 방법을 담은 책이 1970년에 나왔기에 오래된 방법이기는 하나 아직도 현실의 응용에서는 매우 많이 쓰이고 있음.